SECONDE EPREUVE

Durée : 4 heures

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel U de dimension finie sur un corps commutatif K. Pour chaque vecteur u de U et chaque polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de K[X], on pose :

$$P(f)(u) = a_0u + a_1f(u) + \ldots + a_nf^n(u),$$

avec $f^0(u) = u$, $f^{k+1}(u) = f(f^k(u))$, k entier $\geqslant 0$.

On note I_u l'ensemble des polynômes P de K[X] tels que :

$$P(f)(u) = 0$$

et $< u >$ le sous-espace vectoriel de U engendré par u, $f(u)$, $\ldots$, $f^k(u)$,...

I

1° Vérifier que I_u est un idéal de K[X] distinct de l'idéal nul.

En déduire qu'il existe un et un seul polynôme P_u dont le coefficient du terme de plus haut degré égale 1 et tel que $Q \in K[X]$ soit élément de I_u si et seulement si P_u divise Q.

2° Déterminer P_0. Existe-t-il un vecteur $u \neq 0$ tel que $P_u = P_0$? Caractériser par le degré de P_u les vecteurs propres u de f. Que déduit-on sur f si le degré de P_u est au plus 1 pour tout u de U?

3° Soient v, w des vecteurs de U.

a. Calculer $Q(f)(v + w)$ pour Q multiple commun de P_v et P_w; quelle relation en déduit-on entre P_{v+w} et le plus petit commun multiple des polynômes P_v et P_w?

b. Calculer $P_w(f)(v + w)$, puis $R(f)(v)$ pour $R = P_{v+w} - P_w$; en déduire P_{v+w} en fonction de P_v et P_w quand P_v et P_w sont premiers entre eux.

c. Déterminer P_v, P_w et P_{v+w} quand $v = u_1 + u_3$, $w = u_2 - u_3$, où u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs propres de f associés à trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3 respectivement. Que montre cet exemple?

II

1° Calculer $P_u(f)(v)$ pour $v \in < u >$; quelle relation en déduit-on entre P_u et P_v?

2° Comparer la dimension de $< u >$ au degré de P_u.

3° Reconnaître $< u > \cap < u' >$ pour u, $u' \in U$ et P_u, $P_{u'}$ premiers entre eux.

On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de II *que* $U = < u >$ *pour au moins un vecteur u de* U.

4° Comparer le polynôme caractéristique de f avec P_u en écrivant la matrice de f dans une base convenable.

5° Majorer la dimension du noyau de f et donner la dimension des sous-espaces propres de f.

6° Soit V un sous-espace vectoriel de U tel que $f(V) \subset V$. Montrer que les polynômes P de K[X] vérifiant $P(f)(u) \in V$ forment un idéal de K[X]. En déduire qu'il existe $v \in V$ tel que $V = < v >$. Montrer que V admet un supplémentaire W tel que $f(W) \subset W$ si et seulement si P_v et P_u/P_v sont premiers entre eux.

7° Soit g un endomorphisme de U commutant avec f. Vérifier que g est déterminé par la donnée de $g(u)$. En déduire, en fonction des itérés f^k de f, une base de l'espace vectoriel des endomorphismes qui commutent avec f.

III

On suppose que U se décompose en somme directe de la forme :

$$U = < v > \oplus < w >.$$

1° Soit g un endomorphisme de U commutant avec f. Quelle relation a-t-on entre P_v et $P_{g(v)}$? En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que v_1, $w_1 \in U$ soient les images respectives $h(v)$, $h(w)$ par un endomorphisme h qui commute avec f.

2° Montrer qu'il existe v', w' dans U tels que U se décompose en somme directe $U = < v' > \oplus < w' >$ avec $P_{w'}$ diviseur de $P_{v'}$.

3° Donner en fonction des degrés de $P_{v'}$ et $P_{w'}$ la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes qui commutent avec f.

FIN

×30×

E. N. S. E. T.

Section A1 1977

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail